M 2 MATHEMATIQUES FONDAMENTALES (resp : michele.bolognesi@umontpellier.fr)
PLAQUETTE 2020/21

Premier semestre

Géométrie algébrique – Sylvain Brochard

Variétés affines ,Variétés projectives, Morphismes, Applications rationnelles, Éclatements, Lissite' et espace tangent

---

Topologie Algébrique – Stéphane Baseilhac

Chemins, homotopies, Groupe fondamental du cercle, Théorème de Seifert-Van Kampen, Revêtements,Groupe fondamental et revêtements (classification).

Géométrie Différentielle – Daniel Massart.

1.1 Variétés lisses, fibrés tangents et cotangents ; champs de vecteurs, points critiques et orbites périodiques.
1.2 Formes différentielles , différentielle extérieure, lemme de Poincaré ; cohomologie de de Rham; orientabilité.
1.3 Applications lisses entre deux variétés ; points réguliers et critiques ; plongements et immersions ; théorème de Whitney.
1.4 Degré d'une application entre deux variétés de même dimension ; indice d'un point singulier isolé d'un champ de vecteurs ; indice d'un point fixe isolé d'une application.
1.5 Champs de vecteurs dont les points singuliers sont isolés ; théorème de Poincaré-Hopf.
1.6 Applications génériques d'une variété dans elle même ; formule de trace de Lefschetz; théorème de Lefschetz.

Approfondissements en géométrie et analyse – Paul-Emile Paradan

1. Fonctions d’une variable complexe

— Intégrale d’une fonction continue le long d’un chemin C^1 par morceaux.

— Formules de Cauchy.

— Principe du prolongement analytique.

— Séries de Laurent. Fonctions méromorphes.

— Théorème des résidus.
— Suites et séries de fonctions holomorphes.

2. Topologie

— Topologie et espaces métriques : compacité, connexité, complétude

— Espaces vectoriels normés sur R ou C: espace de Banach, dualité, théorème d'Ascoli.
— Espaces de Hilbert: projection sur un convexe fermé, bases hilbertiennes, théorème de Lax-Milgram.

3. Calcul différentiel

—Fonctions différentiables : notion de différentielle, formule de Taylor-Young, théorème des accroissements finis, recherche des extrema, difféomorphismes, théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.

— Équations différentielles : théorème de Cauchy-Lipschitz, solutions maximales, lemme de Grönwall, cas des équations différentielles autonomes, stabilité des points d'équilibre

— Géométrie différentielle: sous-variétés de R^n, espace tangent, extrema liés, multiplicateurs de Lagrange.

4. Calcul intégral

— Notions de théorie de la mesure

— Intégration : lemme de Fato, théorème de convergence dominée, espaces L^p, inégalités de Hölder, convolution, régularisation et approximation par convolution.

— Analyse de Fourier : lemme de Riemann-Lebesgue, théorèmes de Dirichlet, de Fejer et de Parseval, transformation de Fourier sur les espaces L^1 et L^2

5. Distributions tempérées

— Espace de Schwartz S(R^d): transformation de Fourier et convolution

— Espace S'(R^d) des distributions tempérées: dérivation, convolution, transformation de Fourier

---

UE Séminaire

Vous devriez préparer une courte exposé de sujet mathématique pour vos collègues de cours, encadrés par un enseignant chercheur.

Deuxième semestre

Ivan Babenko – Dynamique Topologique

2.1 Applications contractantes, notion d'attracteur.

2.2 Applications linéaires, hyperbolicité.

2.3 Rotations du cercle, notion de récurrence, transitivité topologique.

2.4 Equirépartition, ergodicité, théorème de Birkhoff, unique ergodicité

2.5 Doublement sur le cercle/décalage de Bernouilli, expansivité.

2.6 Mélange.

2.7 Entropie d'une mesure, entropie topologique.

2.8 Difféomorphismes linéaires du tore.

2.9 Dynamique symbolique, partitions de Markov, fer à cheval.

2.10 Flot géodésique des surfaces hyperboliques.

Moulay Benameur

Titre : Invariants indiciels et topologie différentielle

Ce cours a pour objectif la définition et l'étude de quelques invariants importants en topologie différentielle classique ainsi que leurs versions de type II. L'outil fondamental qui permettra de les exploiter en topologie et en géométrie riemanniennne sera la notion d'opérateur elliptique. Nous insisterons particulièrement sur les exemples importants que sont la signature et l'invariant eta relatif. Voici un squelette, à titre indicatif, pour ce cours:

Quelques notions d'analyse globale sur les variétés:
- Fibrés, connexion, courbure et morphisme de Chern-Weil.
- Résultats utiles sur les opérateurs elliptiques.
- Opérateurs de Dirac généralisés.
- Formule de Lichnerowicz.
- L'indice et l'invariant eta pour ces opérateurs.
- Indice des opérateurs de Fredholm et explication du théorème de l'indice.
- Exemples: Atiyah-Hirzebruch et Spin-Dirac.

Quelques résultats de rigidité :
- Notion de K-théorie topologique.
- La classe A supérieure comme obstruction à la courbure scalaire positive.
- La classe de signature supérieure comme obstruction à l'équivalence homotopique.
- Suite exacte analytique de Higson-Roe.
- La classe rho supérieure comme mesure de l'espace des modules associé aux PSC.

Application à la théorie L2 pour les revêtements galoisiens.

Prérequis souhaités (pouvant être revus le cas échéant):
- Quelques notions de variétés différentielles et de fibrés vectoriels.
- Cohomologie de de Rham des formes différentielles.
- Théorie spectrale des opérateurs compacts.

Mémoire de M2

Vous allez travailler quelques mois sur un sujet avancé de recherche, encadrés par un enseignant/chercheur, en produisant un mémoire de quelques dizaines de pages. Vous allez présenter ce mémoire devant une commission d'enseignants/chercheurs de l'IMAG.